

基于 Logistic 增长模型的地表下沉时间函数

徐洪钟, 李雪红

(南京工业大学 土木工程学院, 南京 210009)

摘 要: Knothe 时间函数可预测地表下沉, 但其不能反映地表下沉速度和加速度的变化规律。针对 Knothe 时间函数描述的不足, 提出了改进的地表下沉的时间函数——基于 Logistic 增长模型的时间函数。该时间函数可合理描述地表下沉发展变化的全过程, 能反映实际地表下沉的速度和加速度的变化规律, 经实测检验, 证明了该时间函数的实用性和有效性。

关 键 词: 下沉; 时间函数; Logistic 增长模型; 预测

中图分类号: TU 433

文献标识码: A

Time function of surface subsidence based on Logistic growth model

XU Hong-zhong, LI Xue-hong

(College of Civil Engineering, Nanjing University of Technology, Nanjing 210009, China)

Abstract: Knothe time function is used to forecast surface subsidence, but the Knothe time function cannot simulate the subsidence rate and acceleration. According to the limitation of Knothe time function, the improved time function of surface subsidence, time function of surface subsidence based on Logistic growth model, is presented. Logistic time function can describe the whole process of surface subsidence and simulate the subsidence rate and acceleration according to the measured data of mine. The results indicate that the method is effective and applicable.

Key words: subsidence; time function; Logistic growth model; prediction

1 引 言

地下开采引起的地表沉陷变形是一个复杂的 4 维空间问题。在进行开采设计和选择地面建筑物保护措施时, 需考虑地表沉陷变形随时间的发展全过程。目前常用的克诺特 (Knothe) 时间函数, 无法描述地表下沉全过程。针对该时间函数的缺陷, 常占强提出分段的克诺特时间函数, 有的学者提出了双参数的 Sroka-Schober 时间函数和 Kowalski 广义时间函数。本文在分析地表沉降规律和 Logistic 增长模型的基础上, 提出了改进的地表下沉时间函数——基于 Logistic 增长模型的地表下沉时间函数^[1~3]。

2 Logistic 增长模型简介

Logistic 增长模型又被称为 Verhulst-Pearl 模型, 它在生态学、人口学等领域得到广泛地应用。

Logistic 模型的微分形式为

$$\frac{ds}{dt} = as \left(1 - \frac{s}{K} \right) \quad (1)$$

式中 s 为种群大小; t 为时间; a 为瞬时增长率; K 为环境容纳量。

式 (1) 的解, 即 Logistic 模型的积分形式为

$$s = \frac{K}{1 + ce^{-at}} \quad (2)$$

不妨称对应的时间函数式 (2) 为 Logistic 时间函数, 此时, 式 (2) 中各参数的含义分别为: s 为下沉量; t 为时间; a 为时间影响系数; K 为最终沉降量; c 为一待求参数。

式 (2) 所表示的曲线是一条 S 形的曲线, 被称为 Logistic 曲线或 Pearl 曲线, 它反映了事物发生、发展、成熟并趋于饱和 (极限) 的过程。

3 基于 Logistic 增长模型的地表下沉时间函数

研究表明,采动过程中的地表沉陷变形全过程可划分为 3 个阶段:(1)下沉发展:下沉量和下沉速度都比较小的初始下沉阶段;(2)充分下沉:下沉速度较大的活跃下沉阶段,地表点受采动影响,随下部岩体弯曲、断裂、垮落;(3)下沉衰减:下沉速度由最大逐渐趋于零(直至下沉停止)的衰减下沉阶段,地表点随下部岩土体从垮落到“裂隙”、“离层”闭合和破碎岩体的自然压实。当时间为无限大时,下沉量到达极限状态,此时下沉量将不随时间发生变化。对于煤田开采取 5 年即可。从上述地表点下沉过程来看,它与 Logistic 增长模型(曲线)所描述的规律非常相似,因此,可以用 Logistic 增长模型来预测地表沉降随时间的变化规律。

现对地表点下沉的 Logistic 时间函数曲线的形态进行分析。对 Logistic 时间函数求一阶导数、二阶导数,分别得到地表点下沉的速度和加速度曲线,如图 1 所示。

起初,下沉速度随着下沉量增加而增加,当下沉量达到最大下沉量的一半时,下沉速度最大,下沉加速度为 0;随后下沉量继续增大逐渐接近最大下沉值,而下沉速度从最大逐渐减小到零,对应的下沉加速度为负。这与文献[4]给出的理想时间函数分布曲线相一致。这进一步说明地表点下沉的 Logistic 时间函数可以描述地表下沉的全过程。

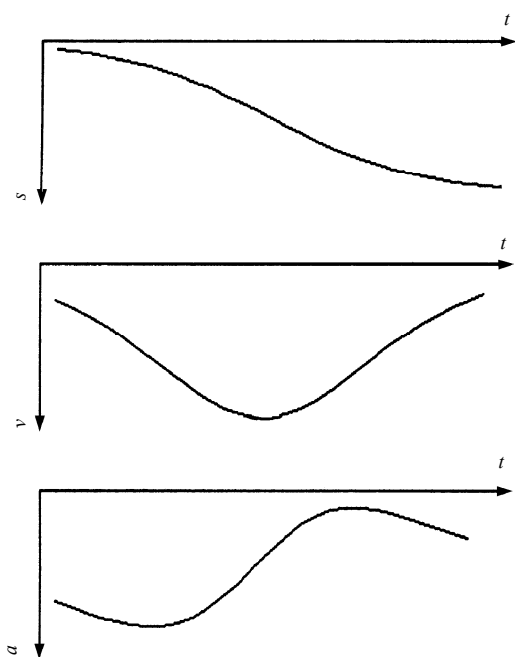


图 1 地表点下沉的 logistic 时间函数、速度和加速度曲线 (从上而下)

Fig.1 Curve of Logistic time function, velocity and acceleration of surface subsidence

4 模型参数估计方法

对于 Logistic 曲线含有 3 个未知参数 K , a , c 需要估计。本文将在三段和法基础上采用非线性回归法估计模型参数^[5]。

(1) 三段和法

三段和法要求 t 是等间隔的。设样本为 $((t_j, s_j), j=1, 2, \dots, n)$ 按顺序分为 3 等分, 令 $r = \text{int}(n/3)$, 若 $n > 3r$, 可适当舍弃 1~2 个数。

$$S_i = \sum_{j=(i-1)r+1}^{ir} \frac{1}{s} \quad (3)$$

$$S_i = \sum_{j=(i-1)r+1}^{ir} \frac{1+ce^{-at_j}}{K} \quad (4)$$

设 $q = \frac{x_n - x_1}{n-1}$, 通过一定的边换, 可得 logistic 曲线的参数估计:

$$K = \frac{r}{S_1 - \frac{(S_1 - S_2)^2}{(S_1 - S_2) - (S_2 - S_3)}} \quad (5)$$

$$a = \frac{1}{qr} \ln \frac{S_1 - S_2}{S_2 - S_3} \quad (6)$$

$$c = \frac{(S_1 - S_2)^2}{(S_1 - S_2) - (S_2 - S_3)} K \frac{e^{ax_1}(1 - e^{-aq})}{(1 - e^{-raq})} \quad (7)$$

(2) 非线性回归

首先,用三段和法求得 logistic 曲线的 3 个参数的初始值 K_0 , a_0 , c_0 , 然后,用 Gauss-Newton 迭代算法求得各参数的最优估计。此方法可以获得 Logistic 增长模型参数的最小二乘无偏性估计。Gauss-Newton 迭代算法可参见有关文献[5]。

5 工程实例

以新峰一矿 12101 走向断面上 46# 观测点为例以说明模型的应用。工程概况和地质情况见文献[6]。图 2 为实例的不同实测点数对预测沉降量的影响曲线。由图可以看出,模型所预测的地表下沉量与时间的关系曲线都呈“S”形变化,与实际沉降变化规律相一致;10 点预测的最终沉降量偏差较大,12 点预测、14 点预测最终沉降量偏差较小。这说明当选取的实测点数较多时,预测的结果和实测值相差较小。

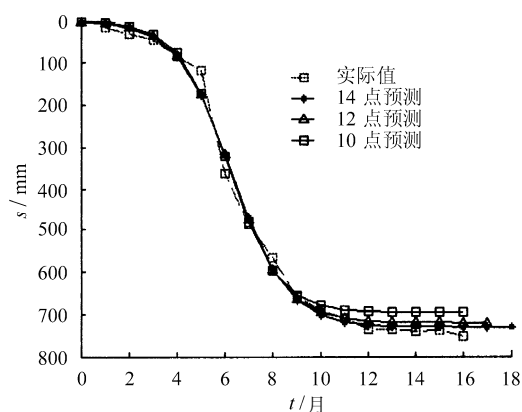


图 2 不同点数情况下沉降量与时间的关系

Fig. 2 The subsidence-time relation of different sample numbers

6 结 语

通过本文的分析和工程实例说明,地表点下沉的 Logistic 时间函数可以较好地预测地表下沉的全过程。

地表点下沉的 Logistic 时间函数,克服了 Knothe 时间函数的缺陷,具有精度高,所需观测数据少等特点。

参 考 文 献

- [1] Cui ximin. Prediction of progressive surface subsidence above longwall coal mining using a time function[J]. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 2001, 38(7): 1 057—1 063.
- [2] 常占强, 王金庄. 关于地表点下沉时间函数的研究——改进的克诺特时间函数[J]. *岩石力学与工程学报*, 2003, (9): 1 496—1 499.
- [3] 彭晓沾, 崔希民, 臧永强, 等. 时间函数与地表动态移动变形规律[J]. *北京科技大学学报*, 2004, (8): 341—344.
- [4] 崔希民, 缪协兴, 赵英利, 等. 论地表移动过程的时间函数[J]. *煤炭学报*, 1999, 24: 5 453—5 456.
- [5] 王晓波. 用非线性最小二乘法拟合 Logistic 曲线及其在计算机技术扩散研究中的应用[J]. *上海大学学报(自然科学版)*, 1995, (4): 369—375.
- [6] 苏美德, 赵忠明, 李德海, 等. 灰色系统理论模型在矿山开采沉陷中的应用[J]. *西部探矿工程*, 2003, (4): 82—83.

《岩土力学》简介

《岩土力学》是中国科学院武汉岩土力学研究所主办的综合性岩土力学与工程学术期刊(月刊)。为全国中文核心期刊。中国科学引文数据库、中国学术期刊综合评价数据库、中国科技论文统计源期刊,《中国期刊网》、《中国学术期刊(光盘版)》、《万方数据库》全文收录,也是国际三大检索系统之一的美国《工程索引》(EI compendex)文摘收录期刊(光盘版)。2004 年 EI 平均收录率达到 91 %。

本刊主要报道岩土力学与工程研究和工程获得的新理论、新成果、新方法,主要内容有:岩土力学与岩土工程研究、典型工程实录、测试技术与测试方法、学术讨论、学术与工程动态、学术讲座等。

经中科院信息所、清华光盘、万方数据等多个统计部门统计,从不同统计源和从不同的角度排序,《岩土力学》综合排名都位于本学科 8 名以内,成为本学科的核心期刊,其影响因子在 0.3~0.5 之间。

欢迎读者中国期刊网查阅本刊内容。网址: <http://ytlx.chinajournal.net.cn/>